2.Vorlesung Grundlagen der Informatik

Christian Baun

Hochschule Darmstadt
Fachbereich Informatik
christian.baun@h-da.de

20.10.2011

Wiederholung vom letzten Mal

- Vorstellung
- Organisatorisches zur Vorlesung
- Literatur
- Grundlagen der Informatik
  - Definition der Informatik
  - Teildisziplinen der Informatik
  - Informationen und Daten
  - Repräsentation von Zahlen
  - Datei- und Speichergrößen
  - Informationsdarstellung

Heute

- Duales Rechnen

Duales Rechnen

- Computer-Systeme arbeiten mit dualen Zahlen
- Beim *arbeiten* wird **gerechnet**
- Wir betrachten für die dualen Zahlen:
  - Addition
  - Subtraktion
  - Multiplikation
  - Division

Addition

- Das Addieren dualer Zahlen ist dem Addieren im Dezimalsystem ähnlich
- Es wird stellenweise addiert
- Entsteht ein Übertrag, geht dieser auf die nächste Stelle
- Es gelten folgende Regeln:
  - $0 + 0 = 0$
  - $1 + 0 = 1$
  - $1 + 1 = 0$, Übertrag $= 1$
- Beispiel: $1010_2 + 1001_2 = 10011_2$

$$
\begin{array}{cccccl}
 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
+ & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\mathit{1} & & & & & \textit{Übertrag} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

$10_{10} + 9_{10} = 19_{10}$

Addition – Weitere Beispiele

- $110111_2 + 101110_2 = 1100101_2$

$$
\begin{array}{cccccccl}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\
+ & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
\mathit{1} & \mathit{1} & \mathit{1} & \mathit{1} & \mathit{1} & & & \textit{Übertrag} \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

$55_{10} + 46_{10} = 101_{10}$

- $1010110_2 + 1100111_2 = 10111101_2$

$$
\begin{array}{ccccccccl}
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\
+ & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\
\mathit{1} & & & & \mathit{1} & \mathit{1} & & & \textit{Übertrag} \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

$86_{10} + 103_{10} = 189_{10}$

Subtraktion

- Der Subtraktion im Dezimalsystem ähnlich
  - Es wird stellenweise subtrahiert
  - Entsteht ein Übertrag, geht dieser auf die nächste Stelle
- Es gelten folgende Regeln:
  - 0 - 0 = 0
  - 0 - 1 = 1, Übertrag = 1
  - 1 - 0 = 1
  - 1 - 1 = 0
- Das Verfahren funktioniert (wie auch im Dezimalsystem) nicht, wenn Minuend (1. Zahl) < Subtrahend (2. Zahl)
  - In diesem Fall erfolgt die Subtraktion zweier Zahlen durch die Addition des Zweierkomplementes
    - Die Subtraktion von einer positiven Zahl ergibt das gleiche Ergebnis wie die Addition zu einer negativen Zahl mit dem gleichen Betrag

Subtraktion – Beispiele

- $1000100_2 - 0011_2 = 1000001_2$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & & \mathit{1} & \mathit{1} & & \textit{Übertrag} \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

$68_{10} - 3_{10} = 65_{10}$

- $111001_2 - 10110_2 = 100011_2$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
- & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & \mathit{1} & \mathit{1} & & & \textit{Übertrag} \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

$57_{10} - 22_{10} = 35_{10}$

Subtraktion und Darstellung negativer Zahlen

- Negative Zahlen stellt man durch ihren Betrag mit vorangestelltem Minuszeichen dar
  - Bei dualen Zahlen kann man das erste Bit als Vorzeichen interpretieren
- In diesem Fall erfolgt die Subtraktion zweier Zahlen durch die Addition des Zweierkomplementes
- Es gibt 2 Arten der **Komplementbildung**, wobei **B** für das Zahlensystem steht
  1. **B-Komplement** $\Longrightarrow$ *Zweier-Komplement*
  2. **(B-1)-Komplement** $\Longrightarrow$ *Einser-Komplement*

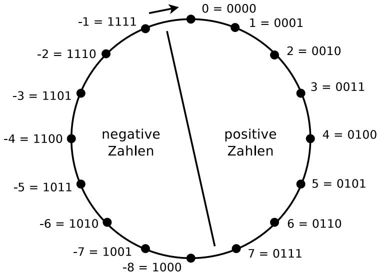
Komplement

- Das Komplement einer n-stelligen Zahl ist deren Ergänzung zum Wert der Basis
- Beispiel: Das Komplement von 6_{10} ist 4_{10}, denn $10^1 = 10$ (die Basis ist 10 und die Ziffer 6 ist einstellig) und die Ergänzung von 6 zu 10 ist 4

Zweier-Komplement – Darstellung als Zahlenring

- Beispiel:
  - Wir haben 4 Bit zur Verfügung
  - Das erste Bit ist das Vorzeichenbit
  - Alle Kombinationen, bei denen das 1. Bit (Vorzeichenbit) gesetzt ist, repräsentieren negative Zahlen
  - Mit 4 Bit kann man Zahlen aus dem Wertebereich -8 bis 7 darstellen

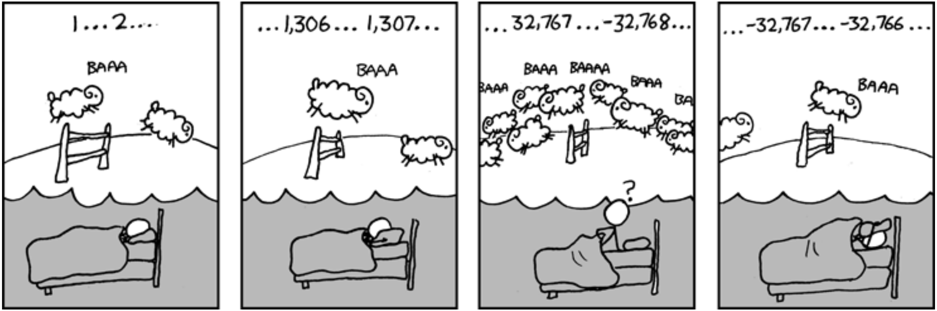
0000	= 0		1000	= −8	
0001	= 1		1001	= −7	
0010	= 2		1010	= −6	
0011	= 3		1011	= −5	
0100	= 4		1100	= −4	
0101	= 5		1101	= −3	
0110	= 6		1110	= −2	
0111	= 7		1111	= −1	



Bit	Zustände	Vorzeichenloser Wertebereich	Vorzeichenbehafteter Wertebereich
4	16	0 bis 15	-8 bis +7
8	256	0 bis 2555	-128 bis +127
16	65.536	0 bis 65.535	-32.768 bis +32.767

- Jede Zahl hat einen eindeutigen Nachfolger
- Diese Zahlendarstellung nennt man **Raumfolgearithmetik**

Zahlenring



Bildquelle: `http://xkcd.com`

Kleinste negative und größte positive Zahl im Zahlenring

- Die Zahl Null ($000\ldots00_2$) wird als positive Zahl aufgefasst
- Dadurch wird die Darstellung unsymmetrisch, denn es gilt bei s verfügbaren Stellen:
  - Die kleinste darstellbare negative Zahl ist $-B^{S-1}$

$$\begin{array}{llllll}
\text{bei } s=4: & -2^{4-1} & = & -2^{3} & = & -8 \\
\text{bei } s=8: & -2^{8-1} & = & -2^{7} & = & -128 \\
\text{bei } s=16: & -2^{16-1} & = & -2^{15} & = & -32768 \\
\text{bei } s=32: & -2^{32-1} & = & -2^{31} & = & -2147483648
\end{array}$$

  - Die größte darstellbare positive Zahl ist $B^{S-1}-1$

$$\begin{array}{llllll}
\text{bei } s=4: & 2^{4-1}-1 & = & 2^{3}-1 & = & 7 \\
\text{bei } s=8: & 2^{8-1}-1 & = & 2^{7}-1 & = & 127 \\
\text{bei } s=16: & 2^{16-1}-1 & = & 2^{15}-1 & = & 32767 \\
\text{bei } s=32: & 2^{32-1}-1 & = & 2^{31}-1 & = & 2147483647
\end{array}$$

Zweier-Komplement vom Subtrahend (2. Zahl) bilden

- Vorgehensweise:
  1. Einer-Komplement vom Subtrahend durch Negation bilden
     - Dabei wird jedes Bit invertiert (umgedreht)
  2. Auf das Einer-Komplement die Zahl 1 aufaddieren

Zweier-Komplement zu 5

Dualdarstellung von 5:	0101
Negation von 5:	1010
$+1$:	0001
$= -5$:	1011

Zweier-Komplement zu -5

Dualdarstellung von -5:	1011
Negation von -5:	0100
$+1$:	0001
$= 5$:	0101

- Bei diesem Vorgehen muss der Computer nicht subtrahieren können
- Jede Subtraktion **a - b = c** wird als Addition **a + (-b) = c** realisiert

- Beispiel: $0010_2 - 0100_2 = 1110_2$

$2_{10} - 4_{10} = 2_{10} + (-4_{10})$

Dualdarstellung von 4:	0100
Negation von 4:	1011
$+1$:	0001
$= -4$:	1100

Dualdarstellung von 2:	0010
$+(-4)$:	1100
$= -2$:	1110

Multiplikation (Quelle: Wikipedia)

- Zuerst schreibt man die Aufgabenstellung in eine Zeile und zieht zur Vereinfachung einen Strich darunter
- Beispiel: $1100_2 * 1101_2 = 10011100_2$

1	1	0	0		$*$		1	1	0	1	
				1	1	0	0				
			+		1	1	0	0			
			+			0	0	0	0		
			+				1	1	0	0	
				1							*Übertrag*
			1	0	0	1	1	1	0	0	

- Schritte:
  1. Die erste Ziffer des zweiten Faktors ist eine 1 und deshalb schreibt man den ersten Faktor rechtsbündig unter diese 1
  2. Auch für alle weiteren Einsen des zweiten Faktors schreibt man den ersten Faktor rechtsbündig darunter
  3. Die so gewonnenen Zahlen addiert man zum Ergebnis der Multiplikation

$12_{10} * 13_{10} = 156_{10}$

Division

- Die Division im dualen Zahlensystem ist der Division im Dezimalsystem ähnlich

```
 100000101 : 11 = 1010111
- 11
 ---
   100
  - 11
   ---
     101
    - 11
     ---
      100
     - 11
      ---
        11
       -11
        --
         0
```

$261_{10} : 3_{10} = 87_{10}$

Nächste Vorlesung

Nächste Vorlesung:

27.10.2011